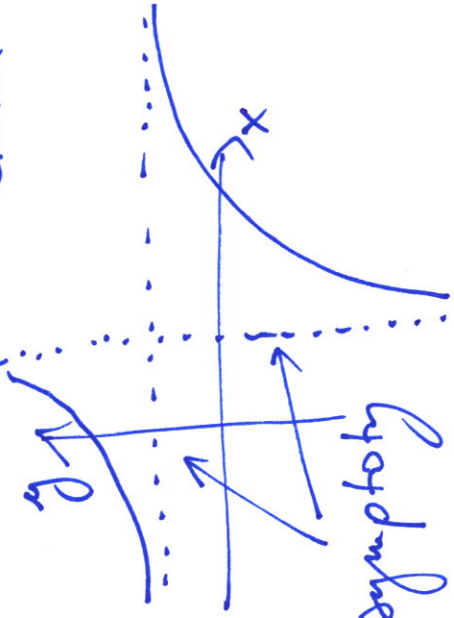


6.11.

Asymptoty funkce

Připomenutí: lineární lomenná fce $\frac{ax+b}{cx+d}$



Asymptoty

Def: asymptota (pro obecnou fci f)
je přímka, k níž se graf fce blíží libovolně blízko

- 1) asymptota v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$
cíl: vislá asymptota

→ vislá asymptota v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$
je příčka s rovnici $x = x_0$,
nastává v případě, že $x_0 \notin D_f$
ale je krajním bodem D_f ,
a navíc $\lim_{x \rightarrow x_0 \pm} f(x) = +\infty$ nebo $-\infty$

Pr: $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

kdý $x_0 = 1$, v tomto bodě počítáme limity:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{0+} = +\infty$$

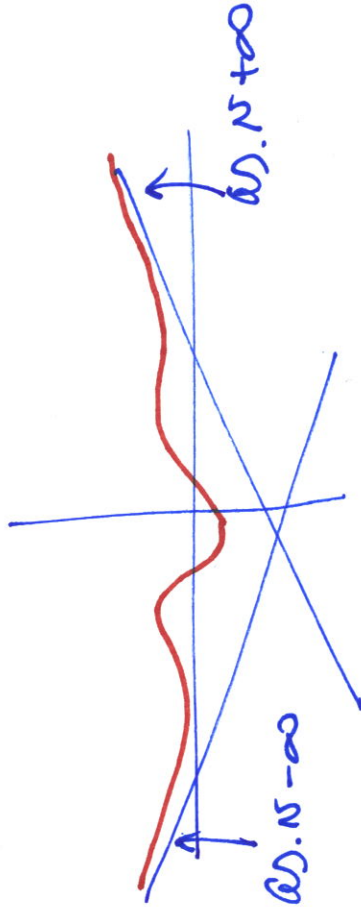
$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{0-} = -\infty$$

$\Rightarrow$ f má vislou asymptotu

$x = 1$

② Asymptota $x \pm \infty$

pro to obecně dvě různé přímky
(as. $x \rightarrow \infty$, as. $x \rightarrow -\infty$), které
mohou eventuelně splýnout
do jedné; nemusí vůbec
existovat.



②a speciální případ - vodorovné asympt.

nastává tedy, je-li:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \underline{\underline{q \in \mathbb{R}}}$$

→ potom f má $x \pm \infty$ vodorovnou asymptotu $y = q$

$$\text{Př.: } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

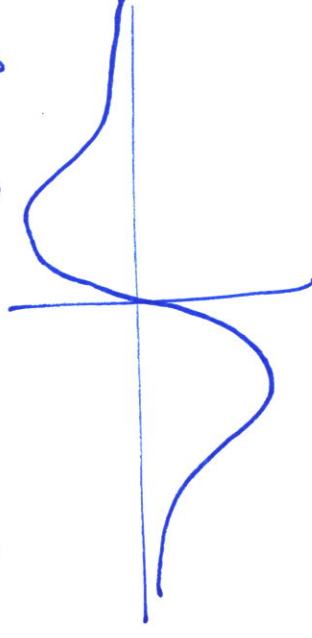
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

⇒ asymptota $y = \frac{a}{c}$ (už víme!)

$$\text{Př.: } f(x) = x \cdot e^{1-2x^2}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$ (speciální je nula)

⇒ $y = 0$ ($= ox$) je asymptota



2.8 obecný případ $x \rightarrow \pm\infty$ (šikmá asymptota)

je to přímka $y = k \cdot x + q$,
kde koeficienty k, q spočteme
takto:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) = q \quad (q \in \mathbb{R})$$

- Pokud vyjdou k nebo q nekonečné (nebo neexistují), asympt. neexistuje
- Počítáme volně! $x \rightarrow +\infty$ a $x \rightarrow -\infty$, tj. vyjdou čísla k_+, k_-, q_+, q_- ; případy $x \rightarrow +\infty$ a $x \rightarrow -\infty$ mohou vyjít stejné, ale nemusí

- Toto zahrnuje i speciální případ rovinné as. (2a), vizde $k=0, q \in \mathbb{R}$.

$$\underline{Pr}: f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x} \quad \text{-- asymptoty}$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$... asi bude vlna
asymptota v bodě 0, jen
musíme ověřit, že $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + x - 3}{x} = \frac{-3}{0^+} = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + x - 3}{x} = \frac{-3}{0^-} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$\Rightarrow$ máme vlnu as. $\boxed{x=0}$
(o x y)

Dále asymptoty $x \pm \infty$.

Zkusme nejprve, zda existuje

odoromá as.:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x} = \pm \infty$$

a proto odoromas as. nemí

$\Rightarrow$ musíme počítat otečen as.:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2} = \underline{\underline{2 = k}}$$

(stejně $x \rightarrow +\infty$ i $x \rightarrow -\infty$)

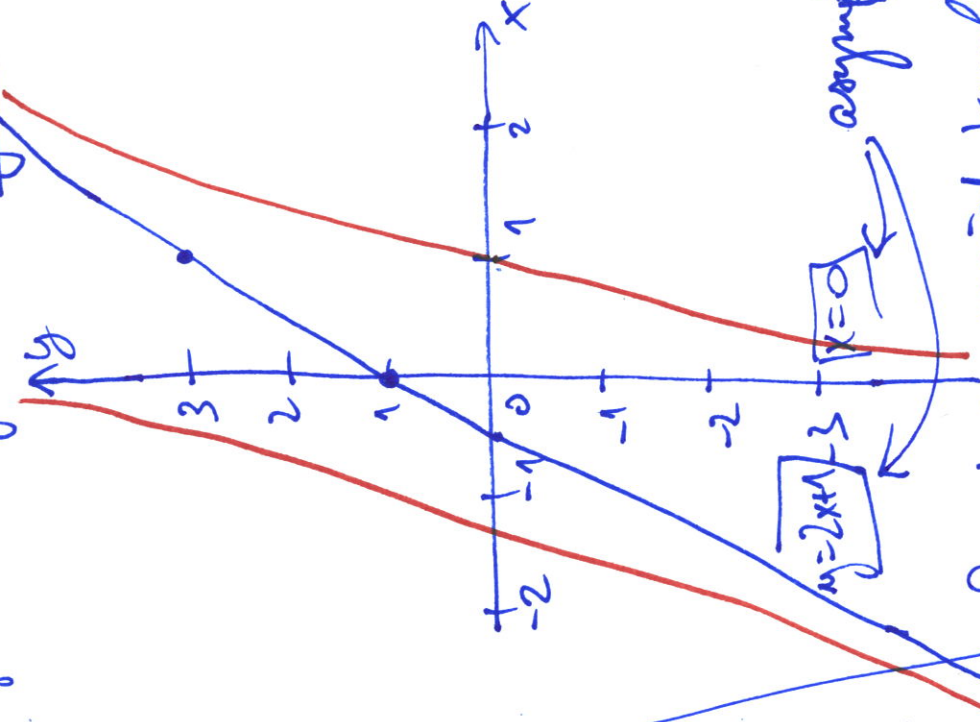
$$(2) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 3}{x} - 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2 + x - 3 - 2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x - 3}{x} = \underline{\underline{1 = q}}$$

(opět stejně $x \rightarrow +\infty$ i $x \rightarrow -\infty$)

$\Rightarrow$ fce f má asymptoty:

$$\boxed{y = 2x + 1}$$



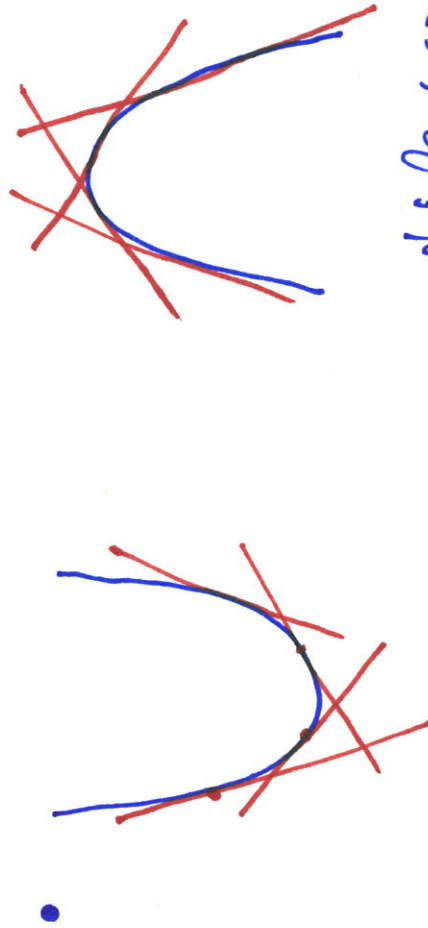
Poznámka: napřed kreslíme asymptoty, pak fci?

Konvexita, konkavita

Def: fce f je na intervalu I :

konvexní konkavní

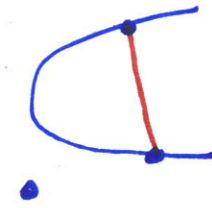
- f' roste I
- f' klesá I



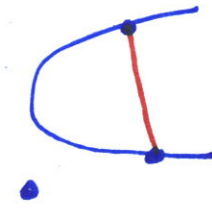
f' roste $\Leftrightarrow$ směrnice
tečen roste

f' klesá $\Leftrightarrow$ směrnice
tečen klesá

- spojnice 2 bodů je nad grafem fce (mohut nad údolím)



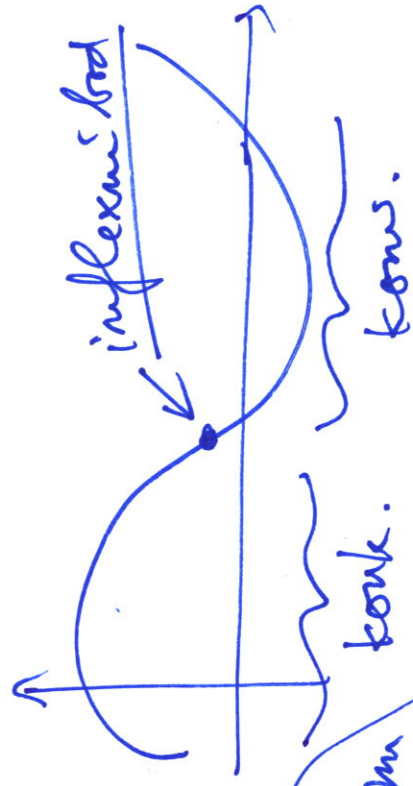
- spojnice 2 bodů je pod grafem (tunel pod kopcem)



Další možné obrázky:



Def: inflexní bod je bod
na grafu fce, kde se mění
konvexita na konkavitu



Def: $f''(x) = (f'(x))'$

... druhé derivace fce f

Platí: $f'' > 0 \text{ v } I \Rightarrow$

$\Rightarrow f'$ roste v I $\Leftrightarrow f$ je konvexní v I

$f'' < 0 \text{ v } I \Rightarrow$

$\Rightarrow f'$ klesá v I $\Leftrightarrow f$ je konkávní v I

Pozn, opacné implikace neplatí!

Body, kde $f''(x) = 0 \dots$ kandidáti

na inflexní bod, tyto body

rozdělují I na intervaly, kde f

je konvexní / konkávní.

Následně to vždy ověřit.

Pr: $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$

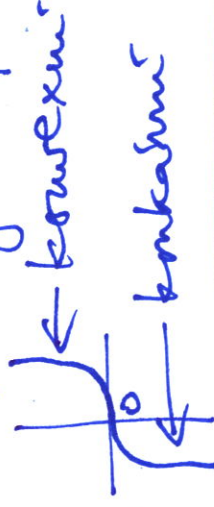
položíme $f''(x) = 6x = 0$
 $\leftarrow x = 0$

kandidát na inf. bod

$x < 0 \Rightarrow 6x < 0 \Rightarrow f$ konkávní v $\mathbb{R}_-$

$x > 0 \Rightarrow 6x > 0 \Rightarrow f$ konvexní v $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow 0$ je inflexní bod



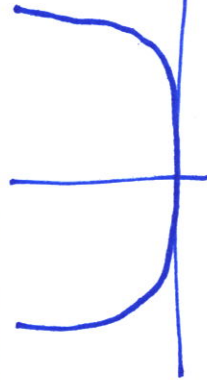
Pr: $f(x) = x^4, f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$

kandidát na inf. bod: $x = 0$

ale f'' je kladná v $\mathbb{R}_-$ i v $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow f$ je konvexní v celém $\mathbb{R}$

$\Rightarrow 0$ není inf. bod!



Desatero vyjvětění přiběhu fce $f(x)$

- 1) D_f (+ je fce sudá/lichá?)
- 2) přesečíky s osami P_x, P_y
(+ hodnoty v několika
kterých bodech)
(+ kde f je fce $>0 / <0$?)
- 3) limity v krajních bodech D_f
- 4) předběžný graf fce
- 5) f'
 - a) stacionární body ($f'(x)=0$)
- 6) vyjímecí body V_f
 - b) body kde $f'(x)$ max. nebo je ∞
 - c) krajní body D_f

- 7) intervaly monotonie + extrémů
bud' A) zjištěním znaménka
derivace v intervalech
mezi vyjím. body
nebo B) porovnáním hodnot /

(limit fce f ve vyjím. bodech
+ hodnoty fce f v extrémech
+ extrémů lokálních / globálních
+ H_f (oba hodnoty)

- 8) asymptoty: a) vříska $x \in \mathbb{R}$
b) obecné $v \pm \infty$

- 9) f'' + konvexitá / konkavita
+ inflexní body

- 10) graf